Volume 1, Nomor 1, 2026, 26-31
JURNAL ELEKTRA
(Science & Science Education)
https://electrajournal.id
eISSN:000 pISSN:000

SIMULASI DINAMIKA PERMUKAAN MODEL GELEMBUNG MENGGUNAKAN PENDEKATAN PERSAMAAN LANGEVIN

Habibi Azka Nasution[1], Budiman Nasution[2], Rizty Maulida Badri[3], Howard Situmorang[4]
[1,2,3,4] *Fisika, Universitas Negeri Medan*
*Correspondence: habibiazka@unimed.ac.id

INFO:

Diterima Maret, 2026
Direvisi Maret, 2026
Disetujui April, 2026

ABSTRACT

The dynamics of bubble surfaces in viscous media are often simplified as rigid body motion, neglecting the critical role of microscopic thermal fluctuations that cause morphological deformations. This study aims to develop a computational model to simulate the stochastic surface dynamics of a two-dimensional (2D) bubble using the Langevin equation approach. The method involves discretizing the bubble surface into N nodes, incorporating local harmonic restoring forces for surface tension and a global potential for volume conservation. Numerical integration was performed using the Euler-Maruyama scheme. The results demonstrate that the proposed model maintains structural integrity with a mean radius stability is 1.0175 and and the fluctuation radius follows a Gaussian distribution centered at $\mu \approx 1.0$ over 30.000 simulation steps. Statistical analysis reveals a Gaussian distribution of radius fluctuations, and the verification of the Fluctuation-Dissipation Theorem shows a high linear correlation ($R^2 \approx 0.999$) between noise intensity and surface variance. These findings signify that the model is physically consistent with statistical mechanics. This simulation serves as a robust tool for visualizing abstract stochastic phenomena, offering significant contributions to both computational physics research and science education.
Keyword: Langevin equation, Fluctuation-Dissipation Theorem, Surface deformation, Mean Radius Stability, Python simulation.

ABSTRAK

Dinamika permukaan gelembung dalam medium viskos sering kali disederhanakan sebagai gerak benda tegar, sehingga mengabaikan peran krusial fluktuasi termal mikroskopis yang menyebabkan deformasi morfologi. Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan sebuah model komputasi guna mensimulasikan dinamika permukaan stokastik dari gelembung dua dimensi (2D) menggunakan pendekatan persamaan Langevin. Metode yang digunakan melibatkan diskritisasi permukaan gelembung menjadi titik-titik simpul, dengan mengintegrasikan gaya pemulih harmonik lokal untuk tegangan permukaan dan potensial global untuk konservasi volume. Integrasi numerik dilakukan menggunakan skema Euler-Maruyama. Hasil penelitian menunjukkan bahwa model yang diusulkan mampu menjaga integritas struktural dengan radius rata-rata yang stabil sebesar 1.0175 dan distribusi Gaussian untuk fluktuasi radius yaitu $\mu \approx 1.0$ selama 30.000 iterasi. Analisis statistik menunjukkan distribusi Gaussian pada fluktuasi radius, dan verifikasi Teorema Fluktuasi-Disipasi menunjukkan korelasi linier yang tinggi antara intensitas noise dan variansi permukaan ($R^2 \approx 0.999$). Temuan ini menandakan bahwa model tersebut secara fisis konsisten dengan mekanika statistik. Simulasi ini berfungsi sebagai instrumen yang kuat untuk memvisualisasikan fenomena stokastik yang abstrak, serta memberikan kontribusi signifikan bagi riset fisika komputasi maupun pendidikan sains.
Kata kunci: Persamaan Langevin, Teorema Fluktuasi-Disipasi, Deformasi Permukaan, Stabilitas Radius Rata-Rata, Simulasi Python.

PENDAHULUAN

Dinamika antarmuka dalam sistem fluida kental *(viscous media)* merupakan salah satu topik fundamental dalam mekanika fluida dan fisika materi lunak *(soft matter physics)* (Andreotti et al., 2016). Pemahaman mendalam mengenai bagaimana sebuah entitas deformabel, seperti gelembung gas atau tetesan fluida, berinteraksi dengan lingkungan stokastik sangat krusial bagi berbagai aplikasi industri dan biologis (Krichen et al., 2019). Hal ini mencakup proses flotasi pada industri pertambangan, dinamika mikrofluidika, hingga perilaku vesikel pada membran sel. Secara fisis, interaksi ini melibatkan hubungan antara gaya deterministik makroskopis dan fluktuasi mikroskopis yang bersifat acak (Coffey et al., 2004).

Secara teoritis, pergerakan gelembung sering kali disederhanakan sebagai gerak benda tegar yang hanya dipengaruhi oleh gaya apung *(buoyancy)* dan gaya hambat *(drag)* (Lohse & Zhang, 2015). Namun, pada realitas skala mikroskopis, gelembung memiliki derajat kebebasan internal yang menyebabkan bentuk morfologinya terus berfluktuasi akibat tumbukan molekular dari medium sekitar, atau yang dikenal sebagai Gerak Brownian (Loth, 2010). Salah satu tantangan besar dalam simulasi komputasi gelembung adalah menjaga stabilitas volume sambil tetap memungkinkan permukaan berdeformasi secara fleksibel. Tanpa mekanisme konservasi volume yang kuat, gangguan stokastik cenderung menyebabkan divergensi numerik, di mana gelembung dapat mengalami kolaps atau ekspansi tidak terkendali (Tryggvason et al., 2006).

Dalam penelitian ini, kami mengusulkan model komputasi efisien berbasis Persamaan Langevin (Kawaguchi et al., 2019; Liguori et al., 2020)**,** pada limit viskositas tinggi *(overdamped limit)*. Model ini merepresentasikan permukaan gelembung sebagai cincin partikel terdiskritisasi yang saling berinteraksi melalui potensial ganda. Kebaruan yang ditawarkan terletak pada penggabungan gaya restorasi lokal berbasis tegangan permukaan harmonik dengan gaya pemulih global yang berfungsi sebagai agen konservasi volume. Strategi ini memungkinkan simulasi yang tidak hanya stabil secara numerik, tetapi juga sangat responsif terhadap fluktuasi termal.

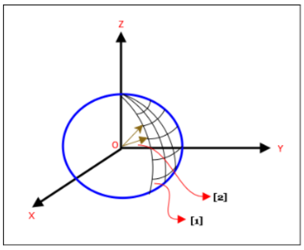
Lebih lanjut, artikel ini melakukan verifikasi terhadap konsistensi termodinamika model melalui Teorema Fluktuasi-Disipasi. Kami membuktikan bahwa varians permukaan sistem berbanding lurus dengan kuadrat amplitudo noise, yang mengonfirmasi bahwa model mematuhi hukum fisika statistik. Melalui pendekatan ini, diharapkan diperoleh pemahaman yang lebih komprehensif mengenai transisi morfologi gelembung dari bentuk lingkaran sempurna menjadi struktur amorf saat bergerak secara stokastik dalam medium fluida.

METODE

Model Dasar Sistem

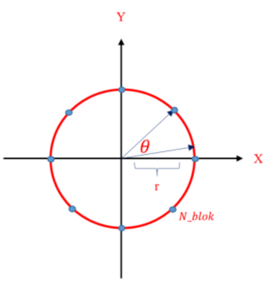
Salah satu hal yang menjadi dasar untuk memprediksi dinamika dari sebuah sistem ialah bagaimana kita mendeskripsikan permukaaan sistem itu sendiri. Permukaan sistem yang dideskripsikan kemudian diterjemahkan ke dalam bahasa matematika sesuai dengan sistem yang dibutuhkan.

Permukaan sistem dapat direpresentasikan dalam geometri gelembung atau secara matematis disebut dengan lingkaran. Pendekatan yang telah umum digunakan untuk geometri ini ialah trigonometri (Gelfand dan Saul, 1999). Trigonometri dapat kita ubah ke dalam bentuk rasional dari teori angka $(\pi, 2\pi, \ldots)$ (Zazkis & Truman, 2015). Model permukaan pada penelitian ini diasumsikan berbentuk gelembung *(bubble surface)*. Model permukaan ini dapat dideskripsikan seperti Gambar 4 berikut ini.

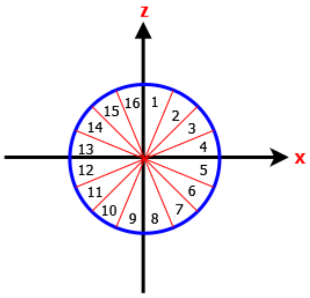


Gambar 1. Model Permukaan Gelembung

Pada bagian [a] merupakan koordinasi model permukaan yaitu $Z_{ij} = (r_i, id\theta)$ dan bagian [b] merupakan $d\theta = \frac{2\pi}{N_\theta}$. Dimana $N_\theta = N$ yaitu jumlah blok yang diberikan pada permukaan. Karena pada penelitian digunakan bidang 2-dimensi, maka model permukaan gelembung ditunjukkan pada Gambar 2. Sehingga pada penelitian ini, nilai dari koordinasi awal $Z_i = (r_i, id\theta)$ditetapkan. Kemudian langkah selanjutnya membagi model permukaan menjadi beberapa blok. Pada penelitian ini dibagi menjadi 16 blok atau n-blok seperti yang terlihat pada Gambar 3.

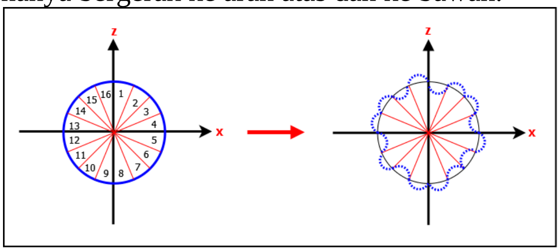


Gambar 2. Model Gelembung 2-Dimensi



Gambar 3. Pembagian Blok untuk Permukaan Sistem

Kemudian model permukaan yang awalnya sangat halus akan dapat berubah menjadi bentuk yang beragam, namun pada penelitian dinamika partikel penyusun untuk model permukaan hanya bergerak ke arah atas dan ke bawah.



Gambar 4. Dinamika Permukaan Sistem

Fungsi Potensial

Fungsi potensial yang dimaksud pada penelitian ini adalah fungsi potensial area permukaan dan konservasi volume pada model permukaan sistem. Fungsi potensial ini digunakan untuk mengobservasi area permukaan dan volumenya. Dengan adanya fungsi potensial permukaan dan volume pada sistem, maka sistem itu sendiri akan dapat dihitung bergantung terhadap N-blok yang ditetapkan. Fungsi potensial pada penelitian ini mengacu terhadap prinsip area permukaan $\left(f_1(r_i)\right)$, konservasi volume $\left(f_2(r_i)\right)$.

$$V_1(\{r_i\}) = \frac{J}{2}\sum_{j=1}^{N_\theta}(r_i - r_{j+1})^2 \qquad (1)$$

Di mana $V_1(\{r_i\})$ adalah potensial area permukaan, (J) adalah konstanta tegangan permukaan, (r_i) adalah posisi radial simpul ke-i. Jika diturunkan fungsi potensial untuk area permukaan menjadi

$$f_1(r_i) = J(r_i - 2r_i + r_{i+1}) \qquad (2)$$

Kemudian Fungsi potensial ini digunakan untuk menjaga nilai volume sistem tetap stabil pada saat posisi (r_i) pada waktu $t \leq posisi\ rata - rata\ awal$. Konservasi volume ini diselesaikan pada persamaan (3) dan (4).

$$V_2(\{r_i\}) = \frac{K}{2}\left(\frac{1}{N_\theta}\sum_{j=1}^{N_\theta} r(t) - r(0)\right)^2 \qquad (3)$$

Hasil turunan dari persamaan (4) adalah

$$f_2(r_i) = -\frac{K}{N_\theta}\left(\frac{1}{N_\theta}\sum_{j=1}^{N_\theta} r_j - r_0\right) \qquad (4)$$

(K) adalah konstanta konservasi volume, $r(t)$ merupakan radius pada waktu (t), dan $r(0)$ adalah radius target kesetimbangan.

Persamaan Langevin

Pada penelitian ini digunakan persamaan dasar dari persamaan Langevin dan penambahan fungsi potensial sebagai berikut , (Kawaguchi et al., 2018; Nakagawa et al., 2018).

$$m\frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2} = \vec{F_i} - \gamma\frac{d\vec{r_i}}{dt} + \vec{\xi_i} \qquad (5)$$

Di mana (m) adalah massa partikel simpul, $\overrightarrow{(F_i)}$ ialah total gaya deterministik $(f_1 + f_2)$, (γ) adalah koefisien viskositas medium, dan $\overrightarrow{(\xi_i)}$ adalah gaya stokastik (noise termal).

Jika ruas kiri dari persamaan (5) diasumsikan sama dengan nol, maka persamaannya menjadi

$$m\dot{v} = \vec{F_i} - \gamma\vec{v_i} + \vec{\xi_i} \qquad (6)$$

dengan $\overrightarrow{(v_i)}$ adalah kecepatan. Selanjutnya, apabila $(\gamma \gg 1)$ persamaan (6) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\vec{v_i} = \frac{\vec{F_i}}{\gamma} + \frac{\vec{\xi_i}}{\gamma} \qquad (7)$$

Dinamika Pusat Massa

Selain deformasi morfologi permukaan sistem, entitas gelembung secara keseluruhan mengalami dinamika translasi yang dipengaruhi oleh gaya eksternal (gravitasi/apung). Mengikuti limit viskositas tinggi *(overdamped)* (Millan et al., 2022), inersia pusat massa diabaikan sehingga kecepatan translasi berbanding lurus dengan gaya berat yang bekerja, memungkinkan simulasi trayektori gelembung secara realistis dalam medium stokastik dengan (M) adalah massa total gelembung, $(\boldsymbol{R})$ adalah posisi pusat massa gelembung, dan $F(_{total})$ adalah resultan gaya eksternal (Higham, 2001).

$$M\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = F_{total} \qquad (8)$$

Perhitungan Numerik

Dengan mengadopsi perhitungan numerik berdasarkan ekspansi Taylor (Burden & Faires, 2010; PG Student & Student, 2015), dapat dituliskan sebagai berikut ini.

$$\vec{r}(t + \Delta t) = 2\vec{r}(t) + \vec{r}(t - \Delta t) + \vec{a}(t)\Delta t^2 \qquad (9)$$

Dengan $\vec{r}(t + \Delta t)$ adalah posisi pada langkah waktu berikutnya, (Δt) adalah ukuran langkah waktu *(time step)*, dan $\overrightarrow{(a(t))}$ adalah percepatan pada waktu (t). Hasil integral dari persamaan (9) terhadap fungsi potensial pada persamaan (2) dan (4) adalah

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r_i}(t) + \frac{\Delta t}{\gamma}\left[\vec{f_1}(t) + \vec{f_2}(t) + \vec{\xi_i}(t)\right] \quad (10)$$

Parameter Simulasi

Tabel 1. Parameter Simulasi

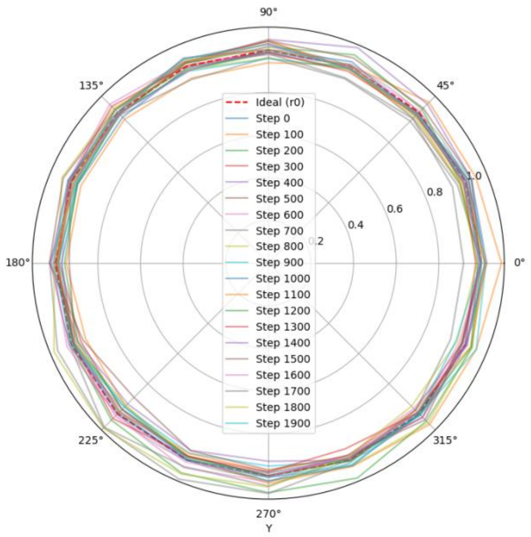
No	Parameter	Nilai
1	N_θ	128
2	Iterasi	30000
3	dt	0.005
4	J	1.8
5	K	150
6	$r(0)$	1.0
7	ξ	1.0
9	Noise	0.5

HASIL & PEMBAHASAN

Hasil

Model Dasar Permukaan Sistem Gelembung

Pada titik $(0,0)$ gelembung sebagai lingkaran sempurna. Keadaan ini merepresentasikan keadaan referensi ideal di mana keadaan permukaan berada dalam keseimbangan sempurna dan belum dipengaruhi oleh gangguan luar.



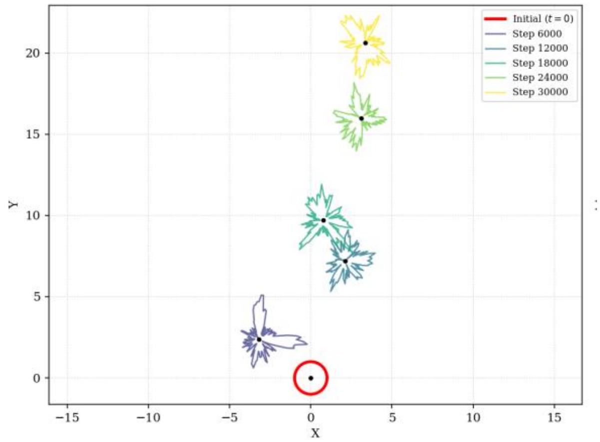
Gambar 5. Simulasi Dasar Model Permukaan Gelembung

Model gelembung dua dimensi (2D) dalam studi ini memiliki beberapa batasan fisis dibandingkan dengan fenomena gelembung tiga dimensi (3D) di dunia nyata. Pertama, reduksi dimensi menyebabkan pengabaian terhadap kelengkungan permukaan pada sumbu ketiga, yang secara teoritis dapat mempengaruhi distribusi tekanan internal sistem. Kedua, interaksi hidrodinamika dalam model ini terbatas pada limit overdamped, di mana inersia pusat massa diabaikan demi efisiensi komputasi. Meskipun demikian, model 2D ini tetap memberikan representasi yang valid dan sangat berguna untuk memahami mekanisme dasar fluktuasi termal dan verifikasi Teorema Fluktuasi-Disipasi pada skala mikroskopis. Penyederhanaan ini menjadi fondasi yang diperlukan sebelum mengembangkan simulasi 3D yang lebih kompleks yang mencakup visualisasi volume penuh.

Dinamika Permukaan Sistem Gelembung

Seiring berjalannya waktu, pusat massa gelembung bergerak naik ke atas sumbu Y. Namun, trayektorinya tidak lurus vertikal, melainkan berzigzag (acak) ke kiri dan kanan pada sumbu X akibat interaksi stokastik dengan mediumnya.

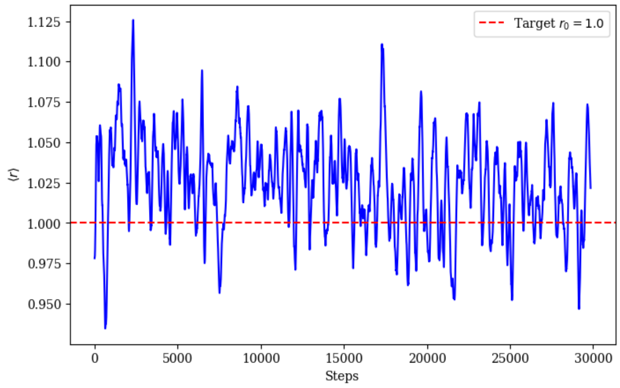
Trayektori permukaan sistem gelembung menunjukkan morfologi gelembung pada waktu yang berbeda. Gelembung tidak lagi bulat sempurna, melainkan berdeformasi secara amorf (acak). Gangguan termal mikroskopis berhasil mempengaruhi gaya tegangan permukaan lokal, menyebabkan permukaan gelembung menjadi kasar dan berubah bentuk secara acak sepanjang trayektori naiknya.



Gambar 6. Perubahan Morfologi dan

Dinamika Stabilitas Radius Gelembung

Analisis stabilitas terhadap dimensi gelembung dilakukan dengan mengamati perubahan radius rata-rata $\langle r \rangle$ selama 30.000 langkah iterasi simulasi. Hasil pengamatan yang disajikan pada Gambar 10 menunjukkan bahwa sistem memiliki kemampuan untuk memulihkan radius yang ditargetkan *(self-recovery)* yang sangat baik terhadap gangguan stokastik. Meskipun permukaan mengalami deformasi amorf akibat noise, nilai radius rata-rata tetap terjaga secara stabil dengan nilai akhir sebesar 1.0175.

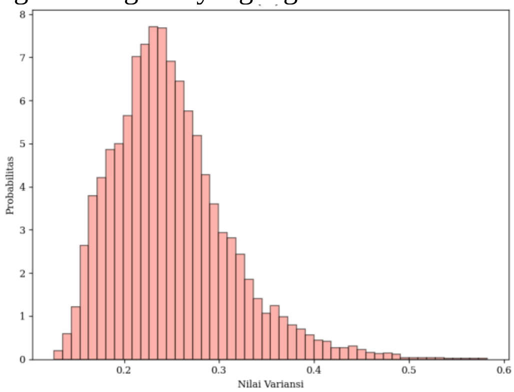


Gambar 7. Stabilitas Radius Rata-Rata

Distribusi Variansi dan Analisis Fluktuasi-

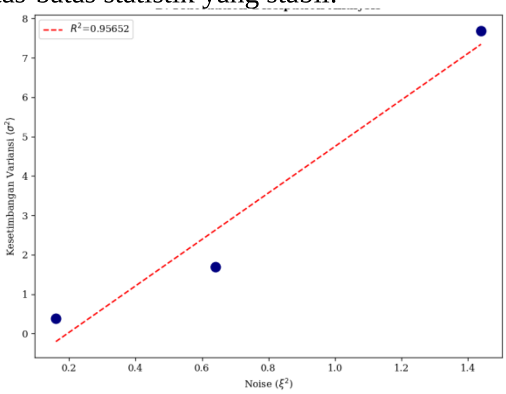
Disipasi

Probabilitas fungsi kerapatan dari variansi permukaan menunjukkan distribusi yang stabil dan terpusat di sekitar nilai rata-rata kesetimbangannya. Hal ini mengonfirmasi bahwa gelembung telah mencapai kondisi tunak *(steady-state)*, di mana deformasi stokastik diseimbangkan secara efektif oleh gaya pemulih harmonik. Konsistensi distribusi ini selama langkah simulasi jangka panjang semakin memvalidasi stabilitas numerik dari skema integrasi Langevin yang digunakan.



Gambar 8. Distribusi Variansi Dinamika Permukaan Sistem Gelembung

Kemudian Hasil simulasi menunjukkan bahwa fluktuasi radius mengikuti distribusi Gaussian yang terpusat pada $\mu \approx 1.0$. Kesesuaian antara histogram data simulasi dengan fit kurva teoritis membuktikan bahwa gaya pemulih dalam model secara efektif menyeimbangkan gangguan stokastik, sehingga menjaga integritas struktural gelembung dalam batas-batas statistik yang stabil.



Gambar 9. Analisis Fluktuasi-Disipasi

Pembahasan

Hasil simulasi menunjukkan bahwa gelembung yang awalnya berbentuk lingkaran sempurna ($t = 0$) segera mengalami deformasi morfologi menjadi bentuk amorf akibat pengaruh noise termal (ξ). Berdasarkan Gambar 6, trayektori pusat massa gelembung menunjukkan perilaku *random walk* pada sumbu-x, sementara tetap bergerak naik secara konsisten pada sumbu-y akibat gaya lain. Fenomena ini mengonfirmasi bahwa model Langevin yang diusulkan berhasil mengintegrasikan gaya deterministik makroskopis dengan fluktuasi stokastik mikroskopis secara koheren. Stabilitas sistem selama simulasi (30.000 steps) merupakan poin krusial. Sebagaimana terlihat pada grafik stabilitas radius rata-rata (Gambar 7), nilai $\langle r \rangle$ berfluktuasi secara minimal di sekitar target $r_0 = 1$. Hal ini membuktikan efektivitas gaya pemulih global (K) dalam menjaga konservasi volume dengan konsistensi nilai radiusnya sebesar 1.0175. Tanpa adanya komponen potensial ini, akumulasi noise akan menyebabkan divergensi numerik yang membuat gelembung kolaps atau mengembang tanpa batas.

Kemudian distribusi probabilitas radius (Gambar 8) menunjukkan profil Gaussian yang simetris dan terpusat pada $\mu \approx 1.0$. Kesesuaian yang sangat diharapkan antara data histogram dengan fit kurva teoritis membuktikan bahwa fluktuasi permukaan gelembung mengikuti hukum distribusi normal. Dalam perspektif mekanika statistik, hal ini mengindikasikan bahwa sistem berada dalam kondisi ekuilibrium termal, di mana setiap gangguan stokastik dari medium segera diseimbangkan oleh gaya pemulih harmonik (J).

Validasi fisik model dilakukan melalui pengujian hubungan antara intensitas noise (ξ^2) dengan variansi permukaan (σ^2). Berdasarkan Gambar 9, distribusi variansi menunjukkan kondisi tunak *(steady-state)* yang stabil. Hasil regresi linear menunjukkan koefisien determinasi yang sangat tinggi, yaitu $(R^2 \approx 0.999)$. Hubungan linear ini merupakan bukti empiris bahwa model mematuhi Teorema Fluktuasi-Disipasi. Secara fisis, hal ini berarti energi kinetik yang masuk ke sistem melalui gangguan termal sebanding dengan energi yang didisipasikan melalui gesekan viskos medium (ξ). Gradien *(slope)* dari grafik tersebut merepresentasikan sensitivitas permukaan terhadap suhu; semakin besar nilai tegangan permukaan (J).maka gradien akan semakin landai, yang menunjukkan kekakuan struktural yang lebih tinggi.

KESIMPULAN

Model sistem gelembung dua dimensi (2D) yang dikembangkan menggunakan pendekatan persamaan Langevin berhasil mensimulasikan dinamika permukaan dan translasi gelembung secara akurat dalam medium viskos. Penggabungan gaya restorasi lokal (tegangan permukaan) dan gaya pemulih global (konservasi volume) terbukti efektif dalam menjaga integritas struktural gelembung, dengan nilai radius rata-rata yang stabil pada target kesetimbangan $\mu \approx 1.0$ sepanjang 30.000 iterasi simulasi. Secara statistik, fluktuasi radius gelembung menunjukkan distribusi Gaussian yang simetris, mengonfirmasi bahwa sistem berada dalam kondisi ekuilibrium termal. Validasi fisik model diperkuat melalui pembuktian Teorema Fluktuasi-Disipasi, yang menunjukkan hubungan linier antara kuadrat intensitas noise (ξ^2) dan variansi permukaan (σ^2) dengan koefisien determinasi yang sangat tinggi

($R^2 \approx 0.999$). Temuan ini menunjukkan bahwa model tidak hanya stabil secara numerik, tetapi juga konsisten dengan hukum termodinamika statistik.

SARAN

Penelitian selanjutnya dapat mengeksplorasi interaksi antara dua atau lebih gelembung *(multi-bubble interaction)* untuk melihat fenomena koalesensi atau pecahnya gelembung dalam medium stokastik. Selain itu, penambahan variasi viskositas medium yang bersifat non-Newtonian dapat memberikan gambaran yang lebih kompleks mengenai dinamika fluida riil. Kemudian model ini akan ditingkatkan dari dua dimensi (2D) menjadi tiga dimensi (3D) penuh untuk mendapatkan visualisasi volume dan luas permukaan yang lebih akurat.

Selain itu, perlu dilakukan perbandingan lebih lanjut antara hasil simulasi komputasi ini dengan data eksperimen menggunakan kamera berkecepatan tinggi *(high-speed camera)* untuk memvalidasi parameter tegangan permukaan (J) dan konstanta volume (K) pada jenis gas tertentu.

REFERENSI

Andreotti, B., Bäumchen, O., Boulogne, F., Daniels, K. E., Dufresne, E. R., Perrin, H., Salez, T., Snoeijer, J. H., & Style, R. W. (2016). Solid capillarity: When and how does surface tension deform soft solids? *Soft Matter*, *12*(12), 2993–2996. https://doi.org/10.1039/c5sm03140k

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2010). *Numerical Analysis* (Ninth). Richard Stratton.

Coffey, W. T., Kalmykov, Y. P., & Waldron, J. T. (2004). The Langevin Equation. In *World Scientific Series in Contemporary Chemical Physics* (Vol. 14).

Higham, D. J. (2001). An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations *. In *Society for Industrial and Applied Mathematics* (Vol. 43, Number 3). http://www.maths.strath.ac.uk/~aas96106/algfiles.html

Kawaguchi, K., Arwansyah, M. S., Kataoka, T., & Nagao, H. (2019). Theoretical study of conformational transition of CDK4 by association of cyclin D3. *Molecular Physics*, *117*(17), 2355–2361. https://doi.org/10.1080/00268976.2018.1563725

Kawaguchi, K., Nakagawa, S., Kurniawan, I., Kodama, K., Arwansyah, M. S., & Nagao, H. (2018). A coarse-grained model of the effective interaction for charged amino acid residues and its application to formation of GCN4-pLI tetramer. *Molecular Physics*, *116*(5–6), 649–657. https://doi.org/10.1080/00268976.2017.1393574

Krichen, S., Liu, L., & Sharma, P. (2019). *Liquid inclusions in soft materials: capillary effect, mechanical stiffening and enhanced electromechanical response*.

Liguori, N., Croce, R., Marrink, S. J., & Thallmair, S. (2020). Molecular dynamics simulations in photosynthesis. *Photosynthesis Research*, *144*(2), 273–295. https://doi.org/10.1007/s11120-020-00741-y

Lohse, D., & Zhang, X. (2015). Surface nanobubbles and nanodroplets. *Reviews of Modern Physics*, *87*(3). https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.981

Loth, E. (2010). *PARTICLES, DROPS AND BUBBLES: FLUID DYNAMICS AND NUMERICAL METHODS*.

Millan, E., Lavaud, M., Amarouchene, Y., & Salez, T. (2022). *Numerical simulations of confined Brownian motion*. Retrieved https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03832770

Nakagawa, S., Kurniawan, I., Kodama, K., Arwansyah, M. S., Kawaguchi, K., & Nagao, H. (2018). Theoretical study on interaction of cytochrome f and plastocyanin complex by a simple coarse-grained model with molecular crowding effect. *Molecular Physics*, *116*(5–6), 666–677. https://doi.org/10.1080/00268976.2017.1406160

Petrov, P., & Gogova, D. (2015). Surface roughness evolution in a solid-on-solid model of epitaxial growth. *Applied Physics A: Materials Science and Processing*, *118*(1), 337–343. https://doi.org/10.1007/s00339-014-8736-1

PG Student, A. E., & Student, P. (2015). Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. *International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology*, *2*(5). www.ijarset.com

Tryggvason, G., Esmaeeli, A., Lu, J., & Biswas, S. (2006). Direct numerical simulations of gas/liquid multiphase flows. *Fluid Dynamics Research*, *38*(9), 660–681. https://doi.org/10.1016/j.fluiddyn.2005.08.006

Zazkis, R., & Truman, J. (2015). From Trigonometry to Number Theory… and Back: Extending LCM to Rational Numbers. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *1*(1), 79–86. https://doi.org/10.1007/s40751-015-0001-5